

13. (und letzte) Übung zur Elementaren Stochastik

Prof. Dr. Ehrhard Behrends, WS 2009/10

Ausgabe: 18. 1. 2010

Abgabe: am 26. 01. 2010 bis 16.00 Uhr in den Fächern der Tutoren

Bei einigen Aufgaben gibt es eine *-Version. Die ist für die ambitionierteren Übungsteilnehmer gedacht. Das gilt auch für die **-Aufgaben, bei denen wird unter den richtigen Lösungen auch ein Preis verlost. Bitte für jedes n auf dem gleichen Zettel höchstens eine der Aufgaben n , n^* , n^{**} bearbeiten, $n = 1, 2, 3, 4$.

1. Zeigen Sie, dass im zentralen Grenzwertsatz die Voraussetzung der Unabhängigkeit wesentlich ist.

2. a) Eine Reißzwecke werde 5000 Mal geworfen, sie fällt 3620 Mal auf die Spitze. Geben Sie mit Hilfe des schwachen Gesetzes ein Intervall $[a, b]$ an, so dass die Wahrscheinlichkeit p für das Auf-die-Spitze-Fallen mit 95 Prozent Wahrscheinlichkeit in $[a, b]$ liegt.

b) Wie oft muss geworfen werden, damit p mit 98 Prozent Wahrscheinlichkeit auf 10^{-2} (also auf zwei Stellen) genau ermittelt werden kann?

3. a) Es sei $A_n = [-n^2, 1 - \frac{1}{n^3}]$ für $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie – mit Beweis – die Menge der x , die in unendlich vielen A_n enthalten sind.

b) Sei $A \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Dann gibt es eine Folge A_n von paarweise verschiedenen offenen Mengen, so dass A gerade die Menge derjenigen x ist, die in unendlich vielen A_n enthalten sind.

b*) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Dann gibt es eine Folge A_n von paarweise verschiedenen offenen Mengen, so dass A gerade die Menge derjenigen x ist, die in unendlich vielen A_n enthalten sind.

4. Wie lange wird man wohl im Mittel warten müssen, bis der Affe an der Schreibmaschine das Wort „bachelor“ geschrieben hat. (Der Affe versucht immer wieder neu ein 8-buchstabiges Wort, er tippt nur auf den 26 Kleinbuchstaben. Er schafft alle 10 Sekunden einen Versuch, und das bei einem Achtstundentag und 250 Arbeitstagen. Das Ergebnis ist in Jahren anzugeben.)

!! Am Ende dieses Übungszettels sind die englischen Versionen der in der Vorlesung aufgetretenen Fachbegriffe zusammengestellt !!

Mögliche Klausurthemen:

Abschnitt I: σ -Algebra, Wahrscheinlichkeitsmaß, Wahrscheinlichkeitsraum, Simulation von W-Räumen,

Abschnitt II: Zufallsvariable, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Unabhängigkeit (auch für mehr als zwei Ereignisse!), Bayes, das induzierte Maß einer ZV, Berechnung der zugehörigen Dichtefunktion, Erwartungswert, Streuung, Faltungen (diskret und kontinuierlich), elementare Kombinatorik (vier Zählprobleme), hypergeometrische Verteilung, maximum-likelihood-Schätzer, Binomialverteilung, Poissonverteilung, Anwendungen des Satzes von de Moivre-Laplace, Exponentialverteilung, Normalverteilung, verschiedene Konvergenzbegriffe für Zufallsvariable, Anwendungen des zentralen Grenzwertsatzes.

Abschnitt III: Lemmata von Borel-Cantelli, Quantitatives zum schwachen Gesetz, starkes Gesetz.

Homepage der Veranstaltung: page.mi.fu-berlin.de/behrends/stochastik2009

Für den mathematischen „Arbeitsspeicher“ ...

Auf die folgenden Fragen sollte man jederzeit eine richtige Antwort geben können. Zur Not mit Hilfe eines vorbereiteten Zettels (der übrigens später bei der Klausur auch verwendet werden darf).

Arbeitsspeicher-Archiv: Nächste Seite

Was versteht man unter der „diskreten Faltung“ zweier Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{N}_0$, und in welchem Zusammenhang ist sie wichtig? Was ist die Faltung zweier Funktionen auf $\mathbb{R}^+$, und was lernt man aus der Faltung zweier Wahrscheinlichkeitsdichten auf $\mathbb{R}^+$? Was versteht man unter der Binomialverteilung? Unter welchen Bedingungen kann man die hypergeometrische Verteilung dadurch approximieren? Und wann die Poissonverteilung? Was besagt der Satz von deMoivre-Laplace? Was wird mit der Stirlingformel approximiert? Was ist eine gedächtnislose Wartezeit? Wie kann man die gedächtnislosen Wartezeiten beschreiben? Was weiß man über Summen, Maxima und Minima gedächtnisloser Wartezeiten? Was weiß man über unabhängige Summen von Normalverteilungen? Was versteht man unter a) fast sicherer Konvergenz, b) Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, c) Konvergenz in Verteilung? Was besagt der zentrale Grenzwertsatz? Was besagt die Tchebycheff-Ungleichung? Was versteht man unter dem schwachen Gesetz der großen Zahlen? **Neu:** Worum geht es bei den Lemmata von Borel-Cantelli?

... und hier noch Beispiele aus den „Arbeitsspeichern“ anderer Teilbereiche der Mathematik:

Ist $\mathcal{E}$ ein Mengensystem, d.h. eine Teilmenge der Potenzmenge einer Menge M , wie ist dann $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$ definiert? Und wie $\bigcap_{E \in \mathcal{E}} E$? Was ist eine offene, was eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$? Was besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung? Was ist eine stetige Funktion? Was versteht man unter dem Zwischenwertsatz? Was ist $f^{-1}(A)$, wie ist die inverse Abbildung f^{-1} definiert (falls sie existiert)? Was heißt Konvergenz für Folgen und Reihen. Was ist eine absolut konvergente Reihe? Warum ist dieser Begriff für die Stochastik wichtig? Was ist eine Folge in einer Menge M ? Unter welchen Bedingungen weiß man, dass der Grenzwert einer Folge von stetigen (bzw. differenzierbaren) Funktionen wieder stetig (bzw. differenzierbar) ist? **Neu:**

Stochastik am Computer: Anregungen

Viele Definitionen, Ergebnisse und Verfahren sind besser zu verstehen, wenn man zur Illustration Computer-Simulationen zur Verfügung hat. Es wird empfohlen, sich solche Simulationen selbst zu schreiben, viele Routinen findet man schon vorgefertigt in den meisten Programmpaketen.

Unterprogramme: Zufallszahlen erzeugen können (Laplace, Bernoulli, Poisson, geometrisch, Exponentialverteilung, Normalverteilung, ...); Häufigkeitsverteilungen skizzieren können (so genannte Histogramme). Monte-Carlo-Verfahren zur approximativen Integration. **Neu:** Testen Sie das Programm zur Simulation von Poissonverteilungen des 11. Übungszettels.

Projekte: Test des Zufallszahlengenerators (etwa einige Millionen gleichverteilte Zufallszahlen in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ erzeugen und prüfen, ob alle Ergebnisse in etwa gleich oft vorkommen); einige Millionen Poissonverteilte Zufallszahlen erzeugen und ein Histogramm erstellen, ... Integrale ausrechnen mit Monte-Carlo-Verfahren und Güte-Test durch Vergleich mit dem exakten Ergebnis; Testläufe zum Übereinstimmungsparadoxon; p gleichverteilt in $[0, 1]$ wählen, dann für verschiedene k testen, wie groß die (experimentelle) bedingte Wahrscheinlichkeit für $k + 1$ Erfolge bei k Erfolgen ist. Testen Sie experimentell die Güte der Approximation beim Wallisprodukt und bei der Stirlingformel. **Neu:** Testen Sie experimentell den Satz von deMoivre-Laplace. **Neu:** Überzeugen Sie sich durch Skizzieren entsprechender Histogramme, dass geeignet normierte unabhängige Summen identisch verteilter Zufallsvariable der Standard-Normalverteilung immer ähnlicher werden.

Arbeitsspeicher-Archiv

Was ist eine σ -Algebra? Wie ist die σ -Algebra der Borelmengen definiert? Was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum? Wie kann man einen Wahrscheinlichkeitsraum einfach definieren, wenn Ω höchstens abzählbar ist? Was versteht man unter a) der Gleichverteilung auf $\{1, \dots, n\}$, b) einem Laplaceraum, c) der Bernoulliverteilung, e) der Poissonverteilung, f) der geometrischen Verteilung? Wie kann man auf einem Intervall, versehen mit der σ -Algebra der Borelmengen, einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Hilfe einer Dichtefunktion definieren? Was versteht man unter a) Gleichverteilung, b) Exponentialverteilung, c) Normalverteilung? Was wird mit dem Buffonschen Nadelexperiment approximativ berechnet? Was ist eine Zufallsvariable? Wie ist der durch eine Zufallsvariable induzierte Wahrscheinlichkeitsraum definiert? Wie ist der Erwartungswert einer Zufallsvariablen im Fall diskreter Räume und bei Räumen mit Dichte definiert? Was sind Varianz und Streuung? Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n -elementigen Menge auszuwählen? In welchen Fällen verwendet man die hypergeometrische Verteilung? Was ist eine maximum-likelihood-Schätzung? Was ist das Übereinstimmungs-Paradoxon? Was versteht man unter „bedingter Wahrscheinlichkeit“? Wann heißen zwei Ereignisse unabhängig? Was bedeutet es, dass n Ereignisse unabhängig sind? Wann sind zwei (oder allgemeiner: n) Zufallsvariable unabhängig? Was weiß man über den Erwartungswert des Produkts zweier *unabhängiger* Zufallsvariablen, was über die Varianz der Summe? Was ist das „Wurzel- n -Gesetz“?

Englische Fachbegriffe aus der Stochastik

Nachstehend findet man die englischen Übersetzungen der in der Vorlesung vorkommenden Fachbegriffe. Nur in fraglichen Fällen ist das deutsche Original in Klammern zusätzlich aufgeführt.

A:

almost sure convergence

B:

Bayes theorem, Borel set

C:

central limit theorem, conditional probability, confidence interval, convergence: almost sure / in distribution / in probability, correlation, covariance

D:

density function (Dichte), distribution (Verteilung), insbesondere normal distribution, uniform distribution, Poisson distribution etc.

E:

error of the first/second kind, event (Ereignis), expectation (Erwartungswert), (auch: expected value)

I:

independent

M:

memoryless

P: probability, probability measure, probability space

R:

random variable, random vector

S:

σ -Algebra, strong law of large numbers, standard deviation (Streuung)

V:

variance

W:

weak law of large numbers

E. Behrends